

一种求解 N-S 方程的自适应直角网格方法

罗昔联^{1,2,3}, 顾兆林², 雷康斌^{2,3}, 加濑究³

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安; 2. 西安交通大学人居环境与建筑工程学院, 710049, 西安;
3. 日本理化学研究所 VCAD 模拟研究室, 351-0198, 日本和光市)

摘要: 提出了一种用直角网格表达背景、切削网格表达边界的非结构化自适应直角网格方法. 该方法采用四叉树保存网格数据, 将切削简化成 6 种类型, 用速度的旋度和散度作为自适应加密标准, 从而可实现任意二维区域网格的自动生成和自适应加密. 通过将极小网格边界化处理, 利用 SIMPLE 算法处理速度和压力的耦合, 实现了该网格上 N-S 方程的离散和求解. 算例表明, 该方法网格生成简单, 可以用于任意形状上的流动和传热模拟, 相比非自适应方法, 用一半的网格数目即可达到相同的计算精度.

关键词: 四叉树; 直角网格; 切削网格; 网格自适应

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)11-0011-07

An Adaptive Cartesian Grid Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations

LUO Xilian^{1,2,3}, GU Zhaolin², LEI Kangbin^{2,3}, KASE Kiwamu³

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. School of Human Settlement and Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 3. VCAD Modeling Team, Riken Institute, Wako 351-0198, Japan)

Abstract: An adaptive unstructured grid generation algorithm, which adopts Cartesian grid to decompose a background domain and adopts a cut cell approach to express curvilinear boundaries, is presented for solving steady incompressible Navier-Stokes equations. By using quadtree data structure to store mesh data, simplifying cut types into six schemes, and employing the curl and divergence of velocity as criteria of grid refinement, this approach can implement mesh generation and adaptive refinement for arbitrary complex geometries automatically. A solution of N-S equations via finite volume method for this mesh is derived. The SIMPLE based smoothing pressure correction is chosen to suppress the checkerboard pressure oscillation due to collocated variables arrangement. The present method is applied to two benchmark problems and is verified to be accurate and efficient.

Keywords: quadtree; Cartesian grid; cut cell; grid adaptation

随着计算流体力学(CFD)技术进入工程应用, 计算对象的几何形状越来越复杂, 因而网格生成和计算精度成为 CFD 研究中的两个重要方向. 据对复杂区域内流动数值模拟的估计, 平均约 80% 的时间

是花在网格生成上的^[1]. 处理复杂计算区域常用的网格有适体坐标网格和非结构化网格等. 对于特别复杂的区域, 采用适体坐标往往很难生成网格, 因此采用三角形(或三维的四面体)作为基本单元的非结

构化网格目前已经成为 CFD 领域内最广泛使用的网格方法^[2-3]. 然而, 三角形网格在生成过程中需要首先对边界进行离散, 然后根据边界的离散生成计算区域网格, 因此生成过程的前处理过程较复杂, 难以实现自动生成.

采用直角坐标网格处理复杂计算形状, 在过去曾经得到广泛应用, 并且近年来又重新得到重视^[4-9]. 使用直角网格处理任意形状的关键是对曲面边界的处理, 主要方式有阶梯近似^[4-5]和切削网格^[6-9]. 阶梯近似实现过程简单, 但是形状误差较大, 并且由于所有网格的边界法向量都是在水平或垂直方向, 可能导致压力和速度在界面上分布不连续. 切削网格方法几何表达更加精确, 但网格的生成及方程求解过程相对复杂. 本文提出一种简化切削网格方法, 采用四叉树数据结构存储网格的几何信息和连接关系, 通过将切削方法简化成 6 种方式来表达曲面边界, 并且对切削生成的五边形进一步分割成 2 个四边形, 从而可以采用统一数据类型存储切削后的多种形状网格数据, 同时为了更加精确地求解流场中具有特定特征的区域, 利用速度的旋度和散度的计算结果作为标准对网格进行自适应加密, 由此得到了一种在任意区域内精确求解 N-S 方程的自适应加密直角网格方法.

1 网格的生成和数据结构

1.1 初始网格生成和网格数据结构

四叉树是表示二值图像的重要方法, 它依据栅格数据二维分布的特点, 将整个图像区域按照 4 个象限进行分割, 逐步分解成一系列正方形区域. 四叉树网格的生成过程是一个递归分割过程: 先定义一个包含整个计算区域的根节点单元, 然后按照根节点一分为四的方式不断递归细分, 直至达到指定的分辨率为止. 图 1 是利用四叉树对根节点进行细分的示意图.

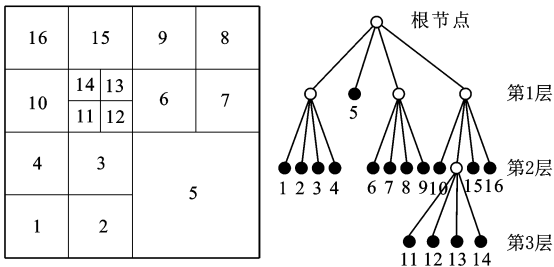
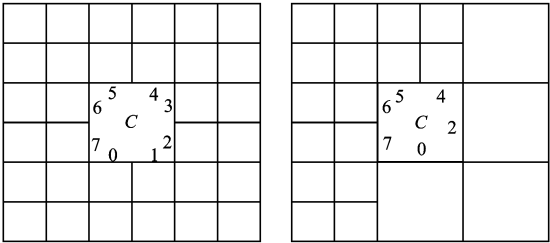


图 1 四叉树网格及数据结构示意图

1.2 邻居查找

非结构化网格与结构化网格的最大区别就是非结构化网格不能根据位置关系直接确定网格的邻居, 而要通过一定的算法查找并保存邻居信息. 四叉树邻居查找的方法很多, 常见的是最近公共祖先方法^[10], 其主要思路是通过树结构逐层上升寻找到网格与其邻居的最近共同祖先节点, 然后以此为节点逐层下降到满足条件的邻接像元. 为了减小网格的偏斜度, 本文在网格生成以及自适应加密过程中, 定义网格与邻居之间的层次差不能大于 1, 因此网格每条边最多有 2 个邻居, 网格总共最多可能有 8 个邻居. 对每一个网格, 定义一个指针数组保存邻居信息, 从南边开始按逆时针方向定义, 其中 0 和 1 对应南边的 2 个邻居, 当某方向只有一个邻居时, 用偶数位置保存, 奇数位置赋值为 NULL. 图 2 为邻居与位置的对应关系示意图.



(a) 网格与邻居层次不同 (b) 网格与邻居层次相同

图 2 邻居与位置的对应关系

1.3 网格切削

网格切削过程主要是根据边界曲线与网格边的交点进行布尔运算, 将边界网格中位于计算区域外的部分切掉. 为了简化切削运算, 作如下假设:

- (1) 如果一个网格与曲线有 2 个以上交点, 则对网格进行细分, 直到曲线与同一网格只有 2 个交点为止;
- (2) 如果 2 个交点与网格某一个顶点重合或者与同一条边的 2 个端点重合, 则假定曲线和网格相切, 切削不发生.

为了对切削进行分类, 将网格的边和顶点按逆时针方向分别命名为 a, b, c, d 及 $0, 1, 2, 3$, 并指定每边的起点属于该边. 根据两交点所处边的编号可以将切削分为 6 种: 01, 02, 03, 12, 13, 23, 如图 3 所示. 每一种切削都会将网格分成 2 个部分, 用 A, B 表示, 其中一部分位于计算区域内, 作为计算网格需要保存, 另一部分位于计算区域外, 需从网格中切掉. 从图 3 中可以看出, 网格切削以后可能会形成三

角形、四边形或五边形 3 种类型的新网格。为了统一数据结构及便于后处理,本文将五边形网格进一步分解成 2 个四边形。以“01”切削为例,若切削后保留部分为五边形 A,其分解过程及相应的数据结构变化如图 4 所示,其他切削五边形的分解规则相同。

在切削中有可能产生体积很小的切削网格,网格体积甚至可能小于机器零点(本文取 10^{-14}),它们会导致控制方程的求解计算发散而无法实施。对于这种小体积网格,常见的处理方法是将其合并到邻居网格中去。但是,网格合并处理很难推广到三维切削网格方法中,这主要是因为三维切削类型太多,网格合并过程十分烦琐,并且合并有可能产生凹多边形。利用切削网格总属于边界网格这一特性,本文将切削剩余体积比率小于 1% 的网格进行边界化近似处理,即在方程组迭代求解过程中并不对该网格求解控制方程,而是假定该网格的各个变量值始终等于边界值。

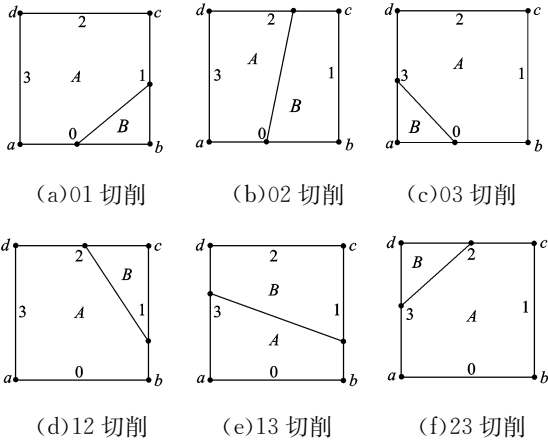
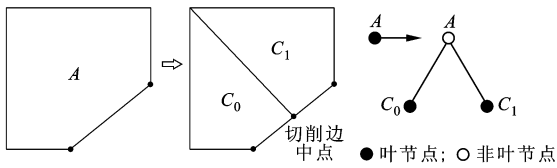


图 3 网格的 6 种切削



(a) 网格分解 (b) 数据结构变化

图 4 五边形网格的分解

2 N-S 方程的离散及求解

2.1 控制方程

对于定常流动与传热问题的模拟,通用变量 ϕ 的控制方程可以用以下统一形式表达^[11]

$$\text{div}(\rho \mathbf{U} \phi) = \text{div}(\Gamma_{\phi} \text{grad} \phi) + S_{\phi} \quad (1)$$

式中: ρ 为流体密度; $\mathbf{U}$ 为流体速度; ϕ 为通用变量;

Γ_{ϕ} 为广义扩散系数; S_{ϕ} 为广义源项。

初始正方形网格经过切削和自适应加密后,计算网格中同时存在正交网格和非正交网格。为了采用统一的方法离散式(1),在推导过程中引入一个新的坐标系 ξ - η 坐标,其中 ξ 为网格中心连线方向,用 $\mathbf{e}_{\xi}$ 表示单位向量, η 为与边界平行的方向,用 $\mathbf{e}_{\eta}$ 表示单位向量,如图 5 所示。对于正交网格, ξ - η 坐标与 x - y 坐标重合。自适应加密时还会出现悬挂节点,如图 5 中网格 C_2 所示,对于含有悬挂节点的网格边,视为 2 个独立的边界分别处理。

取图 5 中的 C_0 作为控制容积,在控制容积上对式(1)积分,并利用散度定律,式(1)可以化成

$$\sum_{n=1}^{\max} F_{fn} \phi_{fn} = \sum_{n=1}^{\max} (\Gamma_{fn} \nabla \phi_{fn} \cdot \mathbf{A}_{fn}) + \Delta V S_{\phi} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{A}_{fn}$ 为界面面积向量; F_{fn} 为界面流量,用 $F_{fn} = \rho \mathbf{U}_{fn} \cdot \mathbf{A}_{fn} = \rho u_{fn} A_{fnx} + \rho v_{fn} A_{fny}$ 计算; ΔV 为网格的面积; $\max$ 表示控制容积的边数,当网格形状为三角形时,对应最小取值 3,而当网格所有 4 个邻居都被自适应加密 1 次后,则对应取最大值 8;下标 fn 表示控制容积的第 n 个边界。

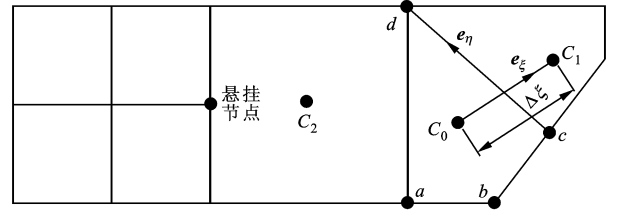


图 5 网格控制容积

2.2 控制方程的离散

对于对流项,由于压力修正采用 Date 提出的光滑压力修正格式^[12],界面速度的计算与传统的动量插值方法^[13]不同,可以直接利用算术平均得到,因此对流项中只有界面值 ϕ_{fn} 需要插值,可以利用泰勒级数展开得到

$$\phi_{fn} = \phi_{\text{upwind}} + \Delta \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_{\text{upwind}} \quad (3)$$

式中: $\Delta \mathbf{r}$ 为界面中心到上游网格中心的距离向量; $\nabla \phi_{\text{upwind}}$ 为网格中心的梯度,可通过最小二乘法构造求解。

对于扩散项,由于不能直接求出非正交网格的变量 ϕ 在 x 方向和 y 方向的偏导数,所以可以利用 ξ - η 坐标来进行离散,其计算表达式为

$$\Gamma_{fn} \nabla \phi_{fn} \cdot \mathbf{A}_{fn} = \Gamma_{fn} \frac{\mathbf{A}_{fn} \cdot \mathbf{A}_{fn}}{\mathbf{A}_{fn} \cdot \mathbf{e}_{\xi}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \Gamma_{fn} \frac{\mathbf{A}_{fn} \cdot \mathbf{A}_{fn}}{\mathbf{A}_{fn} \cdot \mathbf{e}_{\xi}} \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (4)$$

上式右边第一项为正交扩散项,第二项为非正交扩散项.对于正交网格,有 $\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta = 0$,从而非正交扩散项的值为0;对于非正交网格,在求解上式中的 $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$ 时,需要知道界面两个端点的 ϕ 值,通常采用共享端点的网格的中心值加权平均计算,但这会增加计算代价.文献[14]在研究非正交网格扩散项时提出一种简化的近似算法,可以避免求解界面顶点值.利用该算法,式(4)可以采用以下近似表达式计算

$$\begin{aligned} \Gamma_{ln} \nabla \phi_{ln} \cdot \mathbf{A}_{ln} &= \Gamma_{ln} \frac{\mathbf{A}_{ln} \cdot \mathbf{A}_{ln}}{\Delta \xi \mathbf{A}_{ln} \cdot \mathbf{e}_\xi} (\phi_{C_n} - \phi_{C_0}) + \\ &\Gamma_{ln} (\nabla \phi)_{ln} \cdot \mathbf{A}_{ln} - \Gamma_{ln} \frac{\mathbf{A}_{ln} \cdot \mathbf{A}_{ln}}{\mathbf{A}_{ln} \cdot \mathbf{e}_\xi} (\nabla \phi)_{ln} \cdot \mathbf{e}_\xi \quad (5) \end{aligned}$$

当式(1)代表不同的求解变量时,源项所包含的内容各不相同.以动量方程为例,源项主要包含压力项和其他外力,如果流动属于浮力驱动的自然对流,采用 Boussinesq 假设处理浮升力,假定 y 方向为重力方向,则源项的离散形式为

$$\left. \begin{aligned} \Delta V S_\phi &= - \sum_{n=1}^{\max} P_{ln} A_{lnx} \quad (x \text{ 方向}) \\ \Delta V S_\phi &= - \sum_{n=1}^{\max} P_{ln} A_{lny} - \\ &\rho g \beta (T - T_c) \Delta V \quad (y \text{ 方向}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: P_{ln} 为界面压力; g 为重力加速度; β 为体积膨胀系数; T 为控制容积的流体温度; T_c 为参考温度,取冷表面温度.

2.3 压力修正方程

本文采用 SIMPLE 算法求解压力和速度的耦合.将 SIMPLE 算法用于同位网格时,关键问题是避免压力的振荡.采用动量插值方法^[13],引入 $1 - \delta$ 压差可以很好地解决这个问题,但是动量插值方法中求解界面速度的过程相对比较复杂,并且在压力梯度较大的区域可能导致压力分布不连续.为此,Date 提出了光滑压力修正方法^[12],徐明海等进一步将该方法推广到了三角形非结构化网格中^[3].光滑压力修正方法在求解过程中引入了总修正压力 P' ,可通过求解以下拉普拉斯方程得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho \Delta \bar{V} a}{a_p} \frac{\partial P'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \Delta \bar{V} a}{a_p} \frac{\partial P'}{\partial y} \right) = \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{u}_{C_0}^*)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \mathbf{v}_{C_0}^*)}{\partial y} \quad (7) \end{aligned}$$

式中: a 为求解动量方程的松弛因子; a_p 是动量离散方程的主对角元; $\Delta \bar{V}$ 为共享界面的两个网格的面积平均值; u^* 、 v^* 为求解动量方程时所得到的速度值.将式(7)对控制容积积分,并且利用散度定律,可得

以下离散形式

$$\sum_{n=1}^{\max} \left[\left(\frac{\rho \Delta \bar{V} a}{a_p} \right) \nabla P'_{ln} \cdot \mathbf{A}_{ln} \right] = \sum_{n=1}^{\max} F_{ln} \quad (8)$$

式(8)左边用式(5)所示方式离散,右边为控制容积的净质量流量.在求解式(8)得到总修正压力后,单元修正压力(P'_m)以及速度和压力的修正可以通过式(9)和式(10)分别确定

$$\left. \begin{aligned} P'_m &= P' - 0.5(P^* - \bar{P}^*) \\ \bar{P}^* &= \sum_{n=1}^{\max} \frac{P^*}{\Delta L_n} / \sum_{n=1}^{\max} \frac{1}{\Delta L_n} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= P^* + \beta P'_m \\ u &= u^* - \frac{a \Delta \bar{V}}{a_p} \left(\frac{\partial P'_m}{\partial x} \right)_{C_0} \\ v &= v^* - \frac{a \Delta \bar{V}}{a_p} \left(\frac{\partial P'_m}{\partial y} \right)_{C_0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: ΔL_n 为网格 C_0 中心到邻居网格 C_n 中心的距离; β 为压力松弛因子,取 0.3; P^* 为初始的假定压力场或前一次迭代计算得到的压力场.

3 网格自适应加密

四叉树网格的一个重要优点是可以通过网格的一分为四细分方便地实施自适应加密,实现用较少网格数得到较优的计算结果. Dezeuw^[15]对比了各种加密判断标准,发现采用速度的旋度(τ^{curl})和散度(τ^{div})作为自适应标准最为有效,同时为了考虑网格尺寸的影响,自适应标准中还引入网格长度尺寸作为加权因子.考虑到边界切削网格各边尺寸差异很大,在此改用面积的方根作为加权因子.速度旋度和散度的计算表达式如下

$$\begin{aligned} \tau_n^{\text{curl}} &= | \nabla \times \mathbf{U} | (\Delta V)_n^{3/4}; \\ \tau_n^{\text{div}} &= | \nabla \cdot \mathbf{U} | (\Delta V)_n^{3/4} \end{aligned} \quad (11)$$

定义旋度和散度的标准差作为自适应加密阈值

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{curl}} &= \left[\sum_{n=1}^N (\tau_n^{\text{curl}})^2 / N \right]^{1/2} \\ \sigma_{\text{div}} &= \left[\sum_{n=1}^N (\tau_n^{\text{div}})^2 / N \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

如果某一个网格满足 $\tau_n^{\text{curl}} > \sigma_{\text{curl}}$ 或者 $\tau_n^{\text{div}} > \sigma_{\text{div}}$,则该网格标记加密.

4 验证算例

4.1 顶盖驱动斜方腔流

对具有标准解的顶盖驱动斜方腔流问题,在倾斜角为 45° 、 $Re=1\,000$ 时实现了网格生成及流动模拟.计算初始网格的四叉树深度为 7 层,对应网格数

为 2 560,经过 4 次根据计算结果的自适应加密后,得到网格收敛计算结果,对应网格数为 42 366. 图 6 为计算初始网格和自适应收敛后的计算网格,可以看出靠近顶盖附近速度较高区域的网格被自适应加密多层. 图 7 为斜方腔几何中心线(C_{L_1} 为与倾斜边平行的几何中心线, C_{L_2} 为与水平边平行的几何中心线)上的流动速度分布,从计算结果可以看出,随着自适应加密层次的增加,计算结果与标准解^[16]之间误差逐步减小,经过 4 次加密后,计算结果与标准解吻合得很好.

在作者的前期研究中,采用非自适应切削网格方法对该算例进行了模拟^[9],相应的计算网格数为 83 246,约为本文计算收敛时网格数的 2 倍. 图 8 是本文计算结果和文献[9]计算结果的对比,可以看出两者都与标准解吻合良好. 进一步,取图 8 中速度分布线上一些特征点的速度值与文献[16]提供的参考值进行对比,在 C_{L_1} 上 u 速度相对误差的平均值在自适应加密和非自适应情况下分别为 0.40% 和 5.84%,而对于 C_{L_2} 上的 v 速度,则分别为 5.25% 和 4.17%. 从相对误差的数值可以看出,对于非自适应的均匀网格,误差在 C_{L_1} 上和 C_{L_2} 上差别不大,而对于自适应网格, C_{L_1} 上 u 速度的误差要远小于 C_{L_2} 上 v 速度的误差,这主要是因为在该算例中,顶盖给定的边界条件为 $u=1$ m/s,因此整个流场中 u 速度在数值和梯度上都占主导地位,是流动的主要特性,这种主导地位也体现在自适应加密指标值的计算以及

网格加密判定中,使占主导地位的流动特性能够更加精确地求解. 相比文献[9],虽然本文方法在 C_{L_2} 上误差稍大一些,但两者差别不大,而在 C_{L_1} 上本文方法的误差则远小于不采用自适应时的计算误差. 因此,总体上通过采用网格自适应加密,只需一半左右的网格数就能达到非自适应方法的计算效果,这表明自适应方法既可以更加精确地求解流场的主要特性,也可以用较少的网格数取得高精度的计算结果.

4.2 方腔自然对流

对方腔内包含圆柱热表面的自然对流进行计算. 由于计算区域左右对称,取一半区域作为计算对象. 方腔左壁面为冷表面,圆柱面为热表面,上、下壁面绝热,圆柱面采用切削网格近似,瑞利数 $Ra=106$,普朗特数 $Pr=0.1$. 取二叉树深度为 5、对应的网格数为 468 作为初始计算网格,经过 4 次自适应加密后,计算结果收敛. 图 9 为初始网格和最终网格,从中可以看出,经过网格自适应加密后,边界的几何表达更加光滑.

图 10 为局部努塞尔数 Nu 沿冷、热壁面的分布,可以看出随着网格加密,计算结果与标准解之间的差值越来越小,具有很好的网格收敛性. 圆柱面局部 Nu 的分布在初始网格情况下有较大波动,这主要是因为初始网格尺寸太疏,并且切削本身具有一定的随意性,不能采用相同尺寸网格所致. 随着网格加密层次的增加,分布的不连续性得到了很好改善,

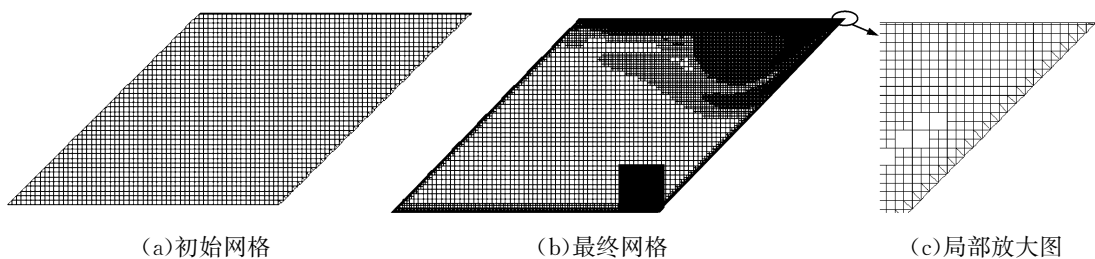


图 6 斜方腔区域计算网格

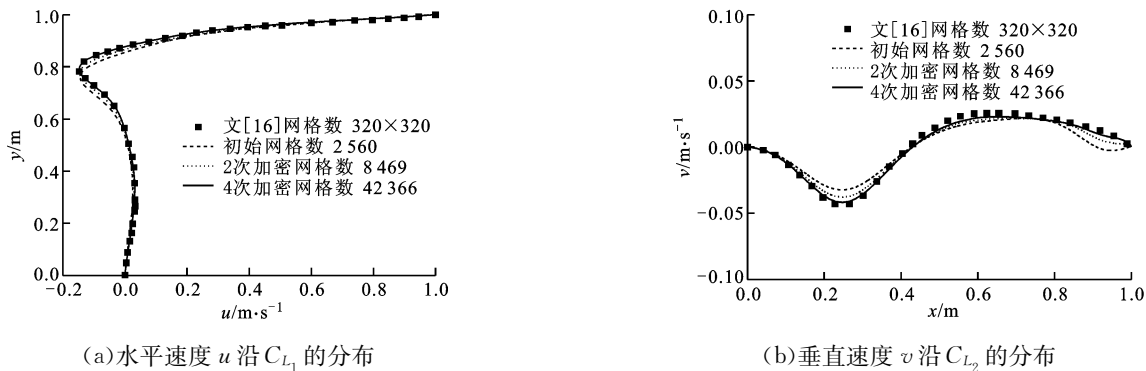


图 7 斜方腔几何中心线上的流动速度分布

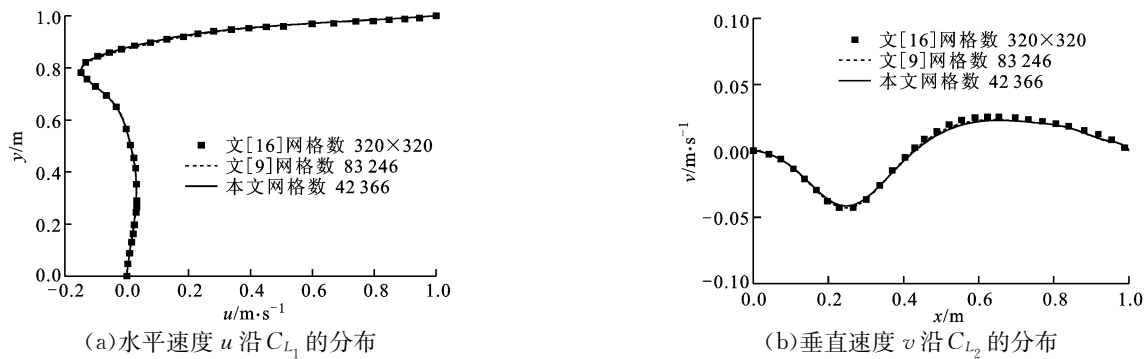


图8 自适应网格与非自适应网格的速度分布对比

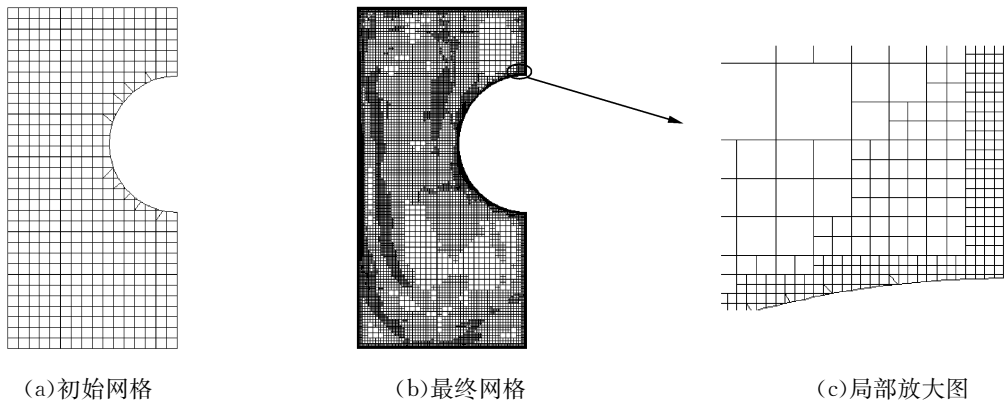


图9 计算区域网格

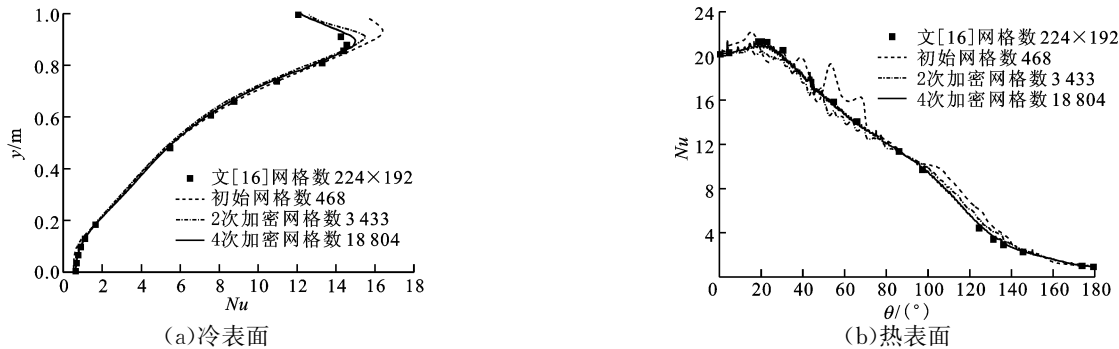


图10 壁面局部 Nu 分布

在最密层次网格上,局部 Nu 的波动已经很小,与标准解结果吻合得很好.表1为圆柱表面的平均 Nu 对比,网格最密时, Nu 的误差只有 0.45%,而此时所用网格数不到标准解计算网格数的一半.

表1 努塞尔数 Nu 的对比

网格层次	网格数	Nu	Nu 误差/%
初始网格	468	6.98	-3.71
1次加密	1 405	6.63	1.49
2次加密	3 433	6.64	1.34
3次加密	7 748	6.66	1.04
4次加密	18 804	6.70	0.45
标准解 ^[16]	224×192	6.73	

5 结 论

(1)本文利用二叉树数据结构,提出了一种采用直角网格处理背景、切削网格处理曲面边界的自适应网格生成算法.该网格生成方法应用于复杂区域时除了求交点运算外,不需要其他数学上的计算处理,可以减少复杂区域非结构化网格生成的工作量,同时相比直角网格的阶梯近似曲面,用切削网格表达几何结构外形更加精确.

(2)采用有限体积法在多种形状网格上离散控制方程,用速度的旋度和散度作为标准自适应加密网格,通过对极小体积切削网格进行边界化处理,成

功避免了网格合并等复杂的操作,实现了在以上网格方法基础上的 N-S 方程求解,为任意复杂区域的流动与传热模拟提供了一种网格生成方法简单、计算结果可靠的新方法.

参考文献:

- [1] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [2] 张楚华, 谷传纲, 苗永森. NS 方程的非结构化网格方法及其差分格式[J]. 西安交通大学学报, 1999, 33(9): 58-61.
ZHANG Chuhua, GU Chuangang, MIAO Yongmiao. Unstructured grid method and its differential schemes for NS equations [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1999, 33(9): 58-61.
- [3] 徐明海, 陶文铨. 一种求解不可压 N-S 方程的非结构化网格方法[J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(1): 83-86.
XU Minghai, TAO Wenquan. Method on unstructured grid for incompressible flows [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2005, 39(1): 83-86.
- [4] YOUNG D P, MELVIN R G, BIETERMAN M B, et al. A locally refined rectangular grid finite element method: application to computational fluid dynamics and computational physics [J]. Journal of Computational Physics, 1991, 92(1): 1-66.
- [5] POPINET S. Gerris: a tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries [J]. Journal of Computational Physics, 2003, 190(2): 572-600.
- [6] QUIRK J J. An alternative to unstructured grids for computing gas dynamic flows around arbitrarily complex two dimensional bodies [J]. Computers & Fluids, 1994, 23(1): 125-142.
- [7] WANG Z J. A quadtree based adaptive Cartesian/quad

- grid flow solver for Navier-Stokes equations [J]. Computers & Fluids, 1998, 27(4): 529-549.
- [8] TUCHER P G, PAN Z. A Cartesian cut cell method for incompressible viscous flow [J]. Applied Mathematical Modelling, 2000, 24(8): 591-606.
- [9] LUO Xilian, GU Zhaolin, LEI Kangbin, et al. Solution of N-S equations based on quadtree cut cell method [J]. Science in China, G: Physics, Mechanics & Astronomy, 2009, 52(6): 877-884.
- [10] SAMET H. Neighbor finding in images represented by octrees [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1989, 46(3): 367-386.
- [11] 陶文铨. 数值传热学[M]. 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001: 5.
- [12] DATE A W. Complete pressure correction algorithm for solution of incompressible Navier-Stokes equations on a nonstaggered grid [J]. Numerical Heat Transfer; B, 1996, 29(4): 441-458.
- [13] RHIE C M, CHOW W L. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation [J]. AIAA J, 1983, 21(11): 1526-1532.
- [14] MATHUR S R, MURTHY J Y. A pressure-based method for unstructured meshes[J]. Numerical Heat Transfer; B, 1997, 31(2): 195-215.
- [15] DEZEEUW D L. A quadtree-based adaptively refined Cartesian-grid algorithm for solution of the Euler equations [D]. Ann Arbor, Michigan, USA: University of Michigan. Department of Aerospace Engineering, 1993.
- [16] DEMIRDZIC I, LILEK Z, PERIC M. Fluid flow and heat transfer test problems for non-orthogonal grids: bench-mark solution [J]. International Journal for Numerical Method in Fluids, 1992, 15(3): 329-354.

(编辑 葛赵青 荆树蓉)

[本刊相关文献链接]

刘海湖, 苏剑, 高丽敏, 等. 算子分裂法求解旋转坐标系下不可压黏性流动. 2007, 41(7): 833-837.
张楚华. 三维流体诱发振动的理论模型与数值模拟. 2007, 41(5): 512-516, 525.
晏鑫, 李军, 丰镇平. Bulk Flow 方法分析孔型密封转子动力特性的有效性. 2009, 43(1): 24-28.